R05 $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$ **et** $\boldsymbol{\theta \in \mathbb{R}}$**, montrer que :**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Corrigé

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) + \sum_{k=0}^{n} i \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \cos(k\theta) + i \binom{n}{k} \sin(k\theta)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i\,k\theta}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\,\theta}\right)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(e^{i\,\theta}\right)^k$$
$$= \left(1 + e^{i\theta}\right)^n$$
$$= \left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\right]^n$$
$$= \left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]^n$$
$$= \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right)^n$$
$$= \left(e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n$$
$$= \left(e^{\frac{\theta}{2}}\right)^n \times 2^n \times \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= e^{i\frac{n\theta}{2}} \times 2^n \times \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \times 2^n \times \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\, 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Or, deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$$